

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
цифровых технологий



/ Кургалин С.Д.

28.02.2022 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### Б1.О.12 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

- 1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**  
02.03.01 Математика и компьютерные науки
- 2. Профиль подготовки/специализация:**  
квантовая теория информации
- 3. Квалификация выпускника:** бакалавр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** цифровых технологий
- 6. Составители программы:**  
Канищева О.И., кандидат физико-математических наук, доцент;  
Семенов М.Е., доктор физико-математических наук, профессор
- 7. Рекомендована:** НМС ФКН (протокол № 3 от 25.02.2022)
- 8. Учебный год:** 2022-2023, 2023-2024      **Семестры:** 1, 2, 3, 4

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целью дисциплины является овладение студентами аппаратом математического анализа, фундаментальными математическими знаниями, служащими основой для дальнейшего изучения всех естественнонаучных дисциплин.

Задачами дисциплины являются: овладение понятийным аппаратом математического анализа, изучение основных методов и инструментов математического анализа и их применение к решению прикладных задач, изучение дифференциального и интегрального исчисления функций одной и многих переменных, знакомство с теорией пределов и рядов, изучение основ теории функции комплексной переменной.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина относится к обязательной части блока Б.1. Для успешного освоения дисциплины достаточно хороших знаний стандартной программы школьной математики.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знает постановки классических задач математического анализа; методы формулировки и доказательства математических утверждений; дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и многих переменных; комплексный анализ.
		ОПК-1.2	Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Умеет применять методы математического анализа для решения задач профессиональной деятельности; применять полученные знания для математически корректной постановки новых задач в различных областях; применять аппарат математического анализа для доказательства утверждений и теорем.
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Владеет навыками самостоятельного выбора методов математического анализа для решения различных задач; навыками использования методов решения классических задач математического анализа для решения различных естественнонаучных задач; навыками анализа и интерпретации результатов решения задач.

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 17 / 612.

Форма промежуточной аттестации экзамен (1-4 семестры)

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость				
		Всего	По семестрам			
			1 семестр	2 семестр	3 семестр	4 семестр
Аудиторные занятия		280	84	80	68	48
в том числе:	лекции	132	34	32	34	32
	практические	148	50	48	34	16
	лабораторные					
Самостоятельная работа		188	96	28	40	24
в том числе: курсовая работа (проект)						
Форма промежуточной аттестации (экзамен – 36 час.)		144	36	36	36	36
Итого:		612	216	144	144	108

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
1	Теория множеств. Числовые множества. Отображение множеств	<p>Множества. Операции над множествами. Свойства операций пересечения, объединения разности, декартового произведения. Множество натуральных чисел. Метод математической индукции. Понятие отображения. Композиция отображений. Сюръективные и инъективные отображения. Биъективные отображения. Обратное отображение. Счетные множества. Множество целых чисел, множество рациональных чисел.</p> <p>Плотность рациональных чисел. Действительные числа. Аксиоматика действительных чисел. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества вещественных чисел. Модуль, абсолютная величина числа. Промежутки, окрестности.</p> <p>Принцип вложенных отрезков.</p> <p>Элементарные функции вещественного переменного. Бином Ньютона.</p> <p>Ограниченные множества. Точные грани множеств. Свойства точной верхней и нижней грани множества. Понятие последовательности и подпоследовательности.</p>	<p><a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788</a></p>
2	Предел числовой последовательности. Предел функции, непрерывность	<p>Предел последовательности.</p> <p>Единственность предела. Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.</p> <p>Монотонные последовательности. Существование предела у монотонной последовательности. Арифметические операции и предельный переход</p> <p>Замечательный предел и число <math>e</math>. Свойства сходящихся последовательностей. Монотонные последовательности. Существование предела у монотонной последовательности. Арифметические операции и предельный переход</p> <p>Замечательный предел и число <math>e</math>. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Предел функции по Гейне, по Коши.</p>	<p><a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788</a></p>

		<p>Эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши. Свойства предела. Предельный переход в неравенствах и при арифметических действиях.</p> <p>Односторонние пределы. Замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Непрерывность функции в точке и на множестве.</p> <p>Односторонняя непрерывность.</p> <p>Непрерывность сложной функции.</p> <p>Непрерывность элементарных функций. Классификация точек разрыва. Теоремы о непрерывных функциях: первая и вторая теоремы Вейерштрасса, теорема Больцано-Коши о промежуточном значении. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.</p>	
3	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	<p>Производная функции. Геометрический и физический смысл. Дифференцирование элементарных функций. Правила дифференцирования. Производная обратной и сложной функции.</p> <p>Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков.</p> <p>Теоремы Ферма, Роля. Теоремы о среднем Лагранжа и Коши. Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора. Остаточный член в формуле Тейлора в форме Лагранжа и в форме Пеано. Формулы Маклорена элементарных функций.</p> <p>Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума. Выпуклые и вогнутые функции. Точки перегиба. Признаки точек перегиба. Исследование свойств функций с помощью производных.</p>	<p><a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788</a></p>
4	Интегральное исчисление функции одной переменной	<p>Первообразная функции, свойства первообразных. Неопределенный интеграл. Формула замены переменных, интегрирование по частям.</p> <p>Интегрирование рациональных и иррациональных функций.</p> <p>Интегрирование тригонометрических и других трансцендентных функций.</p> <p>Определенный интеграл Римана. Условие существования интеграла Римана. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства интегрируемой функции. Теорема о среднем.</p> <p>Формула замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.</p> <p>Понятие о несобственном интеграле. Интегрирование векторно-значных функций.</p> <p>Приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения и объем тела вращения.</p>	<p><a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788</a></p>
5	Числовые и функциональные ряды. Степенные ряды	<p>Числовые ряды. Частичные суммы.</p> <p>Сходимость. Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.</p> <p>Знакопеременные ряды. Признаки Абеля и Дирихле. Функциональные ряды и последовательности. Равномерная и неравномерная</p>	<p><a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788</a></p>

		сходимость. Условие равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование функциональных рядов. Степенные ряды. Область сходимости и радиус сходимости степенного ряда. Ряд Тейлора. Приближенные вычисления с помощью рядов. Формула Стирлинга.	
6	Ряды Фурье	Ряды Фурье. Ортогональные системы функций. Коэффициенты Фурье. Сходимость ряда Фурье в точке. Представление функций рядом Фурье. Признак Дирихле. Представление функций рядом Фурье: случай периодической и непериодической функции. Представление функций рядом Фурье: случай произвольного промежутка, четной и нечетной функции. Интеграл Фурье. Представление функций интегралом Фурье.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788</a>
7	Функции нескольких переменных	Пространство $R^n$ . Норма. Сходимость в $R^n$ . Покоординатная сходимость. Функции многих переменных. Предел. Непрерывность. Теоремы Вейерштрасса для функций нескольких переменных. Дифференцирование скалярных функций нескольких переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Производная по направлению. Градиент. Дифференцируемость сложной функции. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Неявные функции. Теорема о неявной функции. Дифференцируемые отображения. Теорема об обратном отображении.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788</a>
8	Задачи на экстремум. Интегралы, зависящие от параметра	Экстремум функции многих переменных. Необходимые условия. Исследование стационарных точек. Достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Интегралы, зависящие от параметра. Предельный переход, дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла. Несобственные интегралы. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Дифференцируемость и интегрируемость по параметру несобственных интегралов. Интегралы Эйлера. Гамма-функция.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788</a>
9	Кратные интегралы	Двойной интеграл. Свойства. Повторный интеграл. Вычисление двойных интегралов. Замена переменной в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Тройной интеграл. Свойства. Повторный интеграл. Вычисление тройных интегралов. Замена переменной в тройном интеграле. Приложения двойного и тройного интегралов.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788</a>
10	Криволинейные и поверхностные интегралы	Криволинейные интегралы первого рода. Сведение к определенному интегралу. Криволинейные интегралы второго рода. Связь с интегралами первого рода. Приложения криволинейных интегралов. Формула Грина. Площадь фигуры. Независимость интеграла от пути интегрирования. Двусторонние поверхности. Ориентация поверхности. Поверхностный интеграл первого рода. Вычисление интегралов. Поверхностный интеграл второго рода. Поток векторного поля через поверхность. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788</a>
11	Элементы теории поля	Скалярные и векторные поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля.	<a href="https://edu.vsu.ru/">https://edu.vsu.ru/</a>

		Дивергенция, ротор, циркуляция векторного поля. Поток векторного поля через поверхность. Теорема Остроградского-Гаусса в векторной форме. Теорема Стокса. Соленоидальное и потенциальное векторное поле.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">course/view.php?id=11788</a>
12	Основы комплексного анализа	Комплексная плоскость. Функция комплексного переменного. Голomorphic функции. Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Конформные отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Интегрирование функций комплексного переменного. Интегральная теорема Коши. Ряды Тейлора. Ряды Лорана. Особые точки. Вычеты.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11788</a>

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Теория множеств. Числовые множества. Отображение множеств	10	12		20	42
2	Предел числовой последовательности, Предел функции, непрерывность	12	12		30	54
3	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	12	16		30	58
4	Интегральное исчисление функции одной переменной	16	16		16	48
5	Числовые и функциональные ряды. Степенные ряды	12	12		10	34
6	Ряды Фурье	6	12		10	28
7	Функции нескольких переменных	14	12		16	42
8	Задачи на экстремум. Интегралы, зависящие от параметра	12	12		16	40
9	Кратные интегралы	8	12		10	30
10	Криволинейные и поверхностные интегралы	10	10		10	30
11	Элементы теории поля	8	10		10	28
12	Основы	12	12		10	34

	комплексного анализа					
	Итого:	132	148		188	468

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины складывается из аудиторной работы (учебной деятельности, выполняемой под руководством преподавателя) и внеаудиторной работы (учебной деятельности, реализуемой обучающимся самостоятельно).

Аудиторная работа состоит из работы на лекциях и выполнения практических (или лабораторных) заданий в объёме, предусмотренном учебным планом. Лекция представляет собой последовательное и систематическое изложение учебного материала, направленное на знакомство обучающихся с основными понятиями и теоретическими положениями изучаемой дисциплины. Лекционные занятия формируют базу для практических (или лабораторных) занятий, на которых полученные теоретические знания применяются для решения конкретных практических задач. Обучающимся для успешного освоения дисциплины рекомендуется вести конспект лекций и практических (лабораторных) занятий.

Самостоятельная работа предполагает углублённое изучение отдельных разделов дисциплины с использованием литературы, рекомендованной преподавателем, а также конспектов лекций, презентационным материалом (при наличии) и конспектов практических (лабораторных) занятий. В качестве плана для самостоятельной работы может быть использован раздел 13.1 настоящей рабочей программы, в котором зафиксированы разделы дисциплины и их содержание. В разделе 13.2 рабочей программы определяется количество часов, отводимое на самостоятельную работу по каждому разделу дисциплины. Большее количество часов на самостоятельную работу отводится на наиболее трудные разделы дисциплины. Для самостоятельного изучения отдельных разделов дисциплины используется перечень литературы и других ресурсов, перечисленных в пунктах 15 и 16 настоящей рабочей программы.

Успешность освоения дисциплины определяется систематичностью и глубиной аудиторной и внеаудиторной работы обучающегося.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к online занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г. М. Т. 1: Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 1 : учебник. Т. 1 / Фихтенгольц Г. М. — 13-е изд., стер. — 2019 .— 608 с. — Книга из коллекции Лань Математика. — ISBN 978-5-8114-3993-5 .— <URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/113948">https://e.lanbook.com/book/113948</a> >.
2	Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г. М. Т. 2: Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2: учебник. Т. 2 / Фихтенгольц Г. М. — 13-е изд., стер. — 2019 .— 800 с. — Книга из коллекции Лань Математика . — ISBN 978-5-8114-3994-2 .— <URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/113949">https://e.lanbook.com/book/113949</a> >.
3	Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г. М. Т. 3: Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 3: учебник. Т. 3 / Фихтенгольц Г. М. — 10-е изд., стер. — 2019 .— 656 с. — Книга из коллекции Лань Математика . — ISBN 978-5-8114-3995-9 .— <URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/113950">https://e.lanbook.com/book/113950</a> >.
4	Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие / Б.П. Демидович.— Санкт-Петербург : Лань, 2021 .— 624 с. — ISBN 978-5-8114-6940-6 .— <URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/153688">https://e.lanbook.com/book/153688</a> >.
5	Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в при-

	мерах и задачах [Электронный ресурс] / Пантелеев А. В., Якимова А. С. — 3-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2015 .— 448 с. — Допущено УМО по образованию в области прикладной математики и управления качеством в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлению «Прикладная математика».— Книга из коллекции Лань - Математика .— ISBN 978-5-8114-1921-0 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67463">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67463</a> >.
--	--

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа : учебник : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев .— Москва : Физматлит, 2009. Т. 1: Дифференциальные и интегральные исчисления функций одной переменной. Ряды .— 3-е изд., перераб. — 2009 .— 400 с. — ISBN 978-5-9221-0184-4 .— <URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=82814">http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=82814</a> >.
2	Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа : учебник : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев .— Москва : Физматлит, 2009. Т. 2: Дифференциальные и интегральные исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ .— 3-е изд., перераб. — 2010 .— 425 с. — ISBN 978-5-9221-0185-1 .— <URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=82818">http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=82818</a> >.
3	Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / Берман Г. Н. — 8-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2019 .— 492 с. — Книга из коллекции Лань - Математика .— ISBN 978-5-8114-0657-9 .— <URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/111199">https://e.lanbook.com/book/111199</a> >.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№ п/п	Ресурс
1	ЗНБ ВГУ: <a href="https://lib.vsu.ru/">https://lib.vsu.ru/</a>
2	Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online": <a href="http://biblioclub.ru/">http://biblioclub.ru/</a>
3	Электронно-библиотечная система "Лань": <a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>
4	Электронно-библиотечная система "Консультант студента": <a href="http://www.studmedlib.ru">http://www.studmedlib.ru</a>
5	Электронный университет ВГУ: <a href="https://edu.vsu.ru/">https://edu.vsu.ru/</a>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие / Б.П. Демидович.— Санкт-Петербург : Лань, 2021 .— 624 с. — ISBN 978-5-8114-6940-6 .— <URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/153688">https://e.lanbook.com/book/153688</a> >.
2	Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / Берман Г. Н. — 8-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2019 .— 492 с. — Книга из коллекции Лань - Математика .— ISBN 978-5-8114-0657-9 .— <URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/111199">https://e.lanbook.com/book/111199</a> >.

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru, а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Аудитория для лекционных занятий: мультимедиа-проектор, экран для проектора, компьютер с выходом в сеть «Интернет». Специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска). Программное обеспечение: LibreOffice v.5-7, программа для просмотра файлов формата pdf, браузер.

Аудитория для практических занятий: специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска).



## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Разделы 1-12	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольная работа, письменный опрос
2.	Разделы 1-12	ОПК-1	ОПК-1.2	Контрольная работа, письменный опрос
3.	Разделы 1-12	ОПК-1	ОПК-1.3	Контрольная работа, письменный опрос
Промежуточная аттестация форма контроля – Экзамен				Список вопросов к экзамену, практическое задание

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

- контрольная работа;
- письменный опрос.

### Перечень заданий для контрольных работ

#### Контрольная работа № 1

##### Вариант 1

1. Определить множества  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,  $A \Delta B$ , если

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}, \quad B = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 4\}.$$

2. Решить неравенство:  $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$ .

3. Доказать с помощью метода математической индукции следующее утверждение:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n, \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad (C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i).$$

4. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , если  $x_n = \frac{1}{n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Найти:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$ .

##### Вариант 2

1. Определить множества  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,  $A \Delta B$ , если

$$A = \{x : |x - 1| < 2\}, \quad B = \{x : |x - 1| + |x - 2| < 3\}.$$

2. Решить неравенство:  $|x| > |x + 1|$ .

3. Доказать с помощью метода математической индукции следующее утверждение:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

4. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , если  $x_n = \frac{2n}{n^3 + 3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Найти:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} n}{n} \right)$ .

### Контрольная работа № 2

#### Вариант 1

Вычислить следующие пределы:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$ .

#### Вариант 2

Вычислить следующие пределы:

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \dots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x]$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+5}}$ .

### Контрольная работа № 3

#### Вариант 1

Используя различные методы, найти интегралы:

1.  $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$ .

2.  $\int \frac{dx}{\cos x}$ .

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

$$4. \int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx.$$

$$5. \int x \sin \sqrt{x} \, dx.$$

### Вариант 2

Используя различные методы, найти интегралы:

$$1. \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

$$2. \int \cos^2 x \, dx.$$

$$3. \int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} \, dx.$$

$$4. \int x^2 \sin 4x \, dx.$$

$$5. \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

### Контрольная работа № 4

#### Вариант 1

1. Пользуясь определением (суммы Дарбу), найти значение следующего определенного интеграла:

$$\int_{-1}^2 x^2 \, dx.$$

2. Пользуясь различными методами, найти следующие определенные интегралы:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2 \cos x} \, dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}.$$

3. Вычислить длину дуги следующей кривой:

$$y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

4. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \pm c.$$

5. Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} \, dx.$$

#### Вариант 2

1. Пользуясь определением (суммы Дарбу), найти значение следующего определенного интеграла:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

2. Пользуясь различными методами, найти следующие определенные интегралы:

$$\int_1^{e^2} \ln x \, dx, \quad \int_{-2}^2 \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1 + \cos x} \, dx.$$

3. Вычислить длину дуги следующей кривой:

$$y = \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$$

4. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = \pm \frac{c}{2}.$$

5. Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

### **Контрольная работа № 5**

#### **Вариант 1**

1. Доказать непосредственно сходимость следующего ряда и найти его сумму:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$$

2. Исследовать на сходимость следующий знакопостоянный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 3} \right)^{n^2}.$$

3. Исследовать на сходимость следующий знакопеременный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$$

4. Пользуясь мажорантным признаком Вейерштрасса доказать равномерную сходимость в указанном промежутке следующего функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^{2n} + 3^n}, \quad |x| < +\infty.$$

5. Определить радиус и интервал сходимости, а также исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующего степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{n}{e} \right)^n x^n.$$

#### **Вариант 2**

1. Доказать непосредственно сходимость следующего ряда и найти его сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right).$$

2. Исследовать на сходимость следующий знакопостоянный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}.$$

3. Исследовать на сходимость следующий знакопеременный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 x} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}.$$

4. Пользуясь мажорантным признаком Вейерштрасса доказать равномерную сходимость в указанном промежутке следующего функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}, \quad |x| < +\infty.$$

5. Определить радиус и интервал сходимости, а также исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующего степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n.$$

### **Контрольная работа № 6**

#### **Вариант 1**

1. В заданном интервале разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \sin \alpha x, \quad x \in [-\pi; \pi], \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

2. Представить интегралом Фурье следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

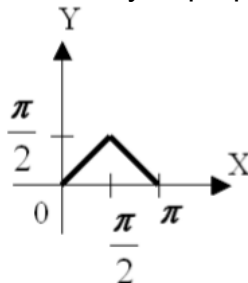
3. Найти преобразование Фурье для функции:

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

4. В заданном интервале разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = x - 1, \quad x \in (-2; 2).$$

5. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически:



#### **Вариант 2**

1. В заданном интервале разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi; \pi].$$

2. Представить интегралом Фурье следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2; \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

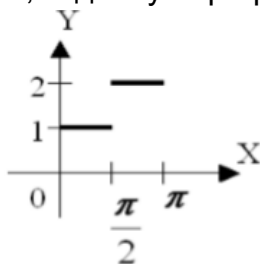
3. Найти преобразование Фурье для функции:

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cos x.$$

4. В заданном интервале разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ -1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

5. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически:



### **Контрольная работа № 7**

#### **Вариант 1**

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^0 dy \int_{-2-y}^{4+y^2} f(x, y) dx.$$

2. Перейдя к полярным координатам, вычислить  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где область  $D$  ограничена кардиоидой  $r = a(1 - \cos \varphi)$ .

3. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 4x^2$ ,  $y = 4$ .

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 1 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

5. Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{OAB} (x + y) dx - (x - y) dy$ , вдоль ломанной  $OAB$ , где  $O(0;0)$ ,  $A(2;0)$ ,  $B(4;5)$ .

#### **Вариант 2**

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^2 dx \int_{4-x^2}^{4+2x^2} f(x, y) dy.$$

2. Вычислить  $\iint_D \rho \sin^2 \varphi d\rho d\varphi$ , где область  $D$  ограничена окружностью  $\rho = 3 \cos \varphi$ .

3. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры, ограниченной эллипсом  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 3 - x - y, \quad z = 0.$$

5. Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y)dy$ , вдоль линии  $L: y = x$ , от  $A(-1; -1)$  до  $B(2; 2)$ .

### **Контрольная работа № 8**

#### **Вариант 1**

1. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z = 0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части  $v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y)$  и значению  $f(0) = 0$ .

2. Вычислить интеграл  $\int_L \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z^2 dz$ , где  $L$  – отрезок прямой, соединяющий точки  $z_1 = 1 + 2i$  и  $z_2 = 2 + 4i$ .

3. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3} dz, \quad L: |z| = 2.$$

4. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:  $\oint_L \frac{dz}{z^2 + 2}$ ,  $L: |z + 2i| = 2$ .

5. Найти все лорановские разложения функции  $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$  по степеням  $(z-1-2i)$ .

#### **Вариант 2**

1. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z = 1$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части  $v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$  и значению  $f(1) = 2$ .

2. Вычислить интеграл  $\int_L \bar{z} dz$ , где  $L$  – дуга параболы от точки  $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  до точки  $z_2 = 1 + 2i$ .

3. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\cos z}{z \left(z - \frac{\pi}{2}\right)} dz, \quad L: |z| = 2.$$

4. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:  $\oint_L \frac{(z^2 + 2) dz}{(z-1)(z-i)^2}$ ,  $L: |z - 2i| = 2$ .

5. Найти все лорановские разложения функции  $f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)}$  по степеням  $(z-1-3i)$ .

**Требования к выполнению заданий контрольных работ № 1-8:**

Контрольные работы выполняются студентами в соответствии с заданием. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. При необходимости следует делать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формул, теорем, выводов, которые используются при решении данной задачи. Все вычисления (в том числе и вспомогательные) необходимо делать полностью. Чертежи и графики должны быть выполнены аккуратно и четко с указанием единиц масштаба, координатных осей и других элементов чертежа. Объяснения к задачам должны соответствовать тем обозначениям, которые даны на чертеже. Решение заданий должно сопровождаться соответствующей аргументацией и выполняться самостоятельно.

### Критерии и шкалы оценивания контрольных работ № 1-8

Шкала оценивания (суммарный % правильно решенных заданий к.р.)	Критерии оценивания
«отлично» (85% – 100 %)	Оценка «отлично» выставляется, если студент выполнил все пять заданий контрольной работы без ошибок и недочетов или допустил не более одного незначительного недочета.
«хорошо» (71% – 84 %)	Оценка «хорошо» выставляется, если студент выполнил работу полностью, но допустил в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета, или не более двух недочетов.
«удовлетворительно» (51% – 70 %)	Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил не более двух грубых ошибок, или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета, или не более двух-трех негрубых ошибок, или одной негрубой ошибки и трех недочетов, или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.
«неудовлетворительно» (0% – 50 %)	Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если студент допустил число ошибок и недочетов, превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3», или если правильно выполнил менее половины работы.

### Перечень вопросов для письменных опросов

#### Раздел 1. Теория множеств. Числовые множества. Отображение множеств.

1. Множества. Операции над множествами.
2. Свойства операций пересечения, объединения разности, декартового произведения.
3. Множество натуральных чисел.
4. Метод математической индукции.
5. Композиция отображений. Сюръективные и инъективные отображения. Биективные отображения. Обратное отображение.
6. Счетные множества. Множество целых чисел, множество рациональных чисел. Плотность рациональных чисел. Действительные числа.
7. Аксиоматика действительных чисел. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества вещественных чисел. Модуль, абсолютная величина числа.
8. Промежутки, окрестности.
9. Принцип вложенных отрезков.
10. Элементарные функции вещественного переменного.
11. Бином Ньютона.
12. Ограниченные множества. Точные грани множеств. Свойства точной верхней и нижней грани множества.
13. Понятие последовательности и подпоследовательности.



## **Раздел 2. Предел числовой последовательности. Предел функции, непрерывность.**

1. Предел последовательности. Единственность предела.
2. Предельный переход в неравенствах.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
4. Свойства сходящихся последовательностей.
5. Монотонные последовательности. Существование предела у монотонной последовательности. Арифметические операции и предельный переход.
6. Замечательный предел и число  $e$ .
7. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
8. Предел функции по Гейне, по Коши. Эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши.
9. Свойства предела. Предельный переход в неравенствах и при арифметических действиях. Односторонние пределы.
10. Первый и второй замечательные пределы.
11. Бесконечно малые и бесконечно большие. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших.
12. Непрерывность функции в точке и на множестве. Односторонняя непрерывность. Непрерывность сложной функции.
13. Непрерывность элементарных функций. Классификация точек разрыва.
14. Теоремы о непрерывных функциях: первая и вторая теоремы Вейерштрасса, теорема Больцано-Коши о промежуточном значении.
15. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

## **Раздел 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.**

1. Производная функции. Геометрический и физический смысл.
2. Дифференцирование элементарных функций.
3. Правила дифференцирования.
4. Производная обратной и сложной функции.
5. Дифференциал функции.
6. Производные и дифференциалы высших порядков.
7. Теоремы Ферма, Роля. Теоремы о среднем Лагранжа и Коши.
8. Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей.
9. Формула Тейлора. Остаточный член в формуле Тейлора в форме Лагранжа и в форме Пеано.
10. Формулы Маклорена элементарных функций.
11. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума. Выпуклые и вогнутые функции. Точки перегиба. Признаки точек перегиба.
12. Исследование свойств функций с помощью производных.

## **Раздел 4. Интегральное исчисление функции одной переменной.**

1. Первообразная функции, свойства первообразных.
2. Неопределенный интеграл.
3. Формула замены переменных, интегрирование по частям.
4. Интегрирование рациональных и иррациональных функций.
5. Интегрирование тригонометрических и других трансцендентных функций.
6. Определенный интеграл Римана. Условие существования интеграла Римана.
7. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Свойства интегрируемой функции. Теорема о среднем.
9. Формула замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.
10. Несобственные интегралы 1-го рода.
11. Несобственные интегралы 2-го рода.

12. Интегрирование векторнозначных функций.
13. Приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения и объем тела вращения.

### **Раздел 5. Числовые и функциональные ряды. Степенные ряды.**

1. Числовые ряды. Частичные суммы. Сходимость.
2. Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши.
3. Признаки сходимости рядов с положительными членами.
4. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
5. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.
6. Знакопеременные ряды. Признаки Абеля и Дирихле.
7. Функциональные ряды и последовательности.
8. Равномерная и неравномерная сходимость. Условие равномерной сходимости функционального ряда.
9. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.
10. Степенные ряды. Область сходимости и радиус сходимости степенного ряда.
11. Ряд Тейлора. Приближенные вычисления с помощью рядов. Формула Стирлинга.

### **Раздел 6. Ряды Фурье.**

1. Ряды Фурье. Ортогональные системы функций. Коэффициенты Фурье.
2. Сходимость ряда Фурье в точке.
3. Представление функций рядом Фурье.
4. Признак Дирихле.
5. Представление функций рядом Фурье: случай периодической и непериодической функции.
6. Представление функций рядом Фурье: случай произвольного промежутка, четной и нечетной функции.
7. Интеграл Фурье.
8. Представление функций интегралом Фурье.

### **Раздел 7. Функции нескольких переменных.**

1. Пространство  $R^n$ . Норма. Сходимость в  $R^n$ . Покоординатная сходимость.
2. Функции многих переменных. Предел. Непрерывность.
3. Теоремы Вейерштрасса для функций нескольких переменных.
4. Дифференцирование скалярных функций нескольких переменных.
5. Частные производные функции нескольких переменных.
6. Полный дифференциал.
7. Производная по направлению. Градиент.
8. Дифференцируемость сложной функции.
9. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
10. Формула Тейлора.
11. Неявные функции. Теорема о неявной функции.
12. Дифференцируемые отображения. Теорема об обратном отображении.

### **Раздел 8. Задачи на экстремум. Интегралы, зависящие от параметра.**

1. Экстремум функции многих переменных. Необходимые условия. Исследование стационарных точек.
2. Достаточные условия экстремума.
3. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
4. Интегралы, зависящие от параметра. Предельный переход, дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла.

5. Несобственные интегралы.
6. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.
7. Дифференцируемость и интегрируемость по параметру несобственных интегралов.
8. Интегралы Эйлера.
9. Гамма-функция.

### **Раздел 9. Кратные интегралы.**

1. Двойной интеграл. Свойства. Повторный интеграл. Вычисление двойных интегралов.
2. Замена переменной в двойном интеграле.
3. Якобиан отображения.
4. Двойной интеграл в полярных координатах.
5. Тройной интеграл. Свойства. Повторный интеграл. Вычисление тройных интегралов.
6. Замена переменной в тройном интеграле. Цилиндрические координаты. Сферические координаты.
7. Приложения двойного интеграла.
8. Приложения тройного интеграла.

### **Раздел 10. Криволинейные и поверхностные интегралы.**

1. Криволинейные интегралы первого рода и их свойства. Сведение к определенному интегралу.
2. Криволинейные интегралы второго рода и их свойства. Вычисление. Связь с криволинейными интегралами первого рода.
3. Приложения криволинейных интегралов.
4. Формула Грина. Площадь фигуры.
5. Независимость интеграла от пути интегрирования.
6. Двусторонние поверхности. Ориентация поверхности.
7. Поверхностные интегралы первого рода и их свойства. Вычисление интегралов.
8. Поверхностные интегралы второго рода и их свойства.
9. Поток векторного поля через поверхность.
10. Приложения поверхностных интегралов.
11. Формула Остроградского-Гаусса.
12. Формула Стокса.

### **Раздел 11. Элементы теории поля.**

1. Скалярные поля. Потенциал скалярного поля.
2. Векторные поля. Векторные линии.
3. Поток векторного поля и его физический смысл.
4. Дивергенция векторного поля и ее физический смысл.
5. Ротор векторного поля.
6. Соленоидальное и потенциальное поля.
7. Циркуляция векторного поля и ее физический смысл.
8. Теорема Стокса.
9. Теорема о выражении ротора через координатные функции векторного поля.
10. Теорема Остроградского-Гаусса в векторной форме.

### **Раздел 12. Основы комплексного анализа**

1. Комплексная плоскость.
2. Функция комплексного переменного. Голоморфные функции.
3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.
4. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
5. Конформные отображения.

6. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного.
7. Интегрирование функций комплексного переменного.
8. Интегральная теорема Коши.
9. Ряды Тейлора и Лорана.
10. Особые точки. Вычеты.

#### **Требования к письменным опросам по разделам 1-12:**

Письменные опросы выполняются студентами в соответствии с полученными вопросами. Ответы на вопросы должны быть правильными, достаточно подробными и выполняться самостоятельно.

#### **Критерии и шкалы оценивания письменных опросов по разделам 1-12:**

Шкала оценивания (суммарный % правильных ответов письменного опроса)	Критерии оценивания
«отлично» (85% – 100 %)	Оценка «отлично» выставляется, если студент написал полные, развернутые ответы на поставленные вопросы, показал совокупность осознанных знаний по разделу дисциплины; в ответе прослеживается четкая структура и логическая последовательность, отражающая сущность раскрываемых понятий. Ответ изложен математическим языком с использованием инструментария изучаемой дисциплины. Могут быть допущены небольшие недочеты при доказательстве теорем.
«хорошо» (71% – 84 %)	Оценка «хорошо» выставляется, если студент написал недостаточно полные и развернутые ответы на вопросы. Логика и последовательность изложения имеют нарушения. Допущены ошибки в раскрытии понятий, употреблении терминов. Умение раскрыть значение обобщенных знаний не показано, слабое владение инструментарием учебной дисциплины. Письменное оформление ответов требует небольших поправок и коррекции.
«удовлетворительно» (51% – 70 %)	Оценка «удовлетворительно» выставляется, если ответы студента на вопросы представляет собой разрозненные знания с существенными ошибками. Присутствуют фрагментарность, нелогичность изложения. Отсутствуют выводы, конкретизация и доказательность изложения.
«неудовлетворительно» (0% – 50 %)	Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если ответы студента на вопросы полностью отсутствуют или даны совсем неправильные ответы на поставленные вопросы.

### **20.2 Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

– собеседование по экзаменационным билетам, содержащим два теоретических вопроса и практическое задание.

#### **Перечень вопросов к экзаменам**

##### **Список вопросов к экзамену (1 курс, 1 семестр)**

1. Множества и операции над ними.
2. Ограниченные множества. Точная верхняя и нижняя грани множества.
3. Мощность множества. Счетные и несчетные множества.
4. Последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства.
5. Предел последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.
6. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число  $e$ .

7. Частичные пределы. Подпоследовательности. Теорема Больцано.
8. Функции. Основные элементарные функции. Сложная функция.
9. Предел функции. Определение предела функции по Гейне и по Коши.
10. Односторонние пределы.
11. Критерий Коши существования предела функции.
12. Монотонные функции.
13. Непрерывность функции в точке.
14. Классификация точек разрыва функции.
15. Свойства непрерывных функций.
16. Использование свойства непрерывности для вычисления предела.
17. Непрерывность функции на множестве. Общие свойства функций непрерывных на отрезке (теорема Коши, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса).
18. Обратная функция. Теорема об обратной функции.
19. Производная функции. Геометрический и физический смысл производной.
20. Дифференциал функции.
21. Использование дифференциала для приближенных вычислений.
22. Связь между непрерывностью функции и дифференцируемостью.
23. Правые и левые производные.
24. Правила дифференцирования.
25. Производная сложной функции.
26. Производная обратной функции.
27. Производная параметрически заданной функции.
28. Производная неявно заданной функции.
29. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница.
30. Теоремы о дифференцируемых функциях (достаточное условие локального возрастания или убывания функции, теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа).
31. Обобщенная теорема конечных приращений (теорема Коши).
32. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталья.
33. Формула Тейлора.
34. Формула Маклорена.
35. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Лагранжа.
36. Достаточное условие экстремума в терминах старших производных.
37. Исследование функций. Условие постоянства и монотонности функции.
38. Исследование функций. Выпуклость функции и точки перегиба. Достаточное условие выпуклости функции.
39. Исследование функций. Точки экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции.
40. Асимптоты.

### **Список вопросов к экзамену (1 курс, 2 семестр)**

1. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.
2. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
3. Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла.
4. Интегрирование рациональных выражений.
5. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби.
6. Метод неопределенных коэффициентов.
7. Интегрирование иррациональных выражений.
8. Интегрирование дифференциального бинома. Подстановки Эйлера.
9. Интегрирование тригонометрических функций.
10. Определенный интеграл. Понятие интегральной суммы.
11. Верхние и нижние суммы Дарбу. Свойства сумм Дарбу.
12. Необходимое и достаточное условие интегрируемости.

13. Свойства интегрируемых функций.
14. Оценки интегралов. Теорема о среднем значении.
15. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница.
16. Замена переменной в определенном интеграле.
17. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.
18. Геометрические приложения определенного интеграла. Длина кривой и площадь плоской фигуры.
19. Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции и объем тела вращения.
20. Несобственный интеграл 1-го рода.
21. Несобственный интеграл 2-го рода.
22. Теорема сравнения. Понятие абсолютной сходимости несобственного интеграла.
23. Знакопостоянные ряды. Необходимое условие сходимости ряда.
24. Критерий Коши сходимости знакопостоянного ряда.
25. Признаки сравнения знакопостоянных рядов.
26. Признак Даламбера, радикальный признак Коши и интегральный признак сходимости знакопостоянных рядов.
27. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости ряда.
28. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле сходимости знакопеременных рядов.
29. Действия над рядами. Сумма и произведение рядов.
30. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости ряда.
31. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле сходимости знакопеременных рядов.
32. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда.
33. Теорема о дифференцируемости функциональных рядов.
34. Теорема об интегрируемости функциональных рядов.
35. Равномерная сходимость. Мажорантный признак Вейерштрасса.
36. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости.
37. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Остаточный член ряда Тейлора в различных формах.
38. Применение рядов для вычисления «неберущихся» интегралов.
39. Функциональные пространства (метрические, линейные, гильбертовы). Определения и примеры.
40. Пространство-кусочно-непрерывных функций.

### **Список вопросов к экзамену (2 курс, 3 семестр)**

1. Основная тригонометрическая система функций.
2. Обобщенный ряд Фурье.
3. Приближение функций в среднем. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье.
4. Неравенство Бесселя и его следствия.
5. Ряд Фурье для периодической функции с периодом  $T$ .
6. Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье.
7. Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций, непериодических функций.
8. Пространства  $R^n$  и множества в них. Функции нескольких переменных.
9. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
10. Частные производные функций нескольких переменных.
11. Дифференциал функции нескольких переменных.
12. Производные сложных функций.
13. Инвариантность формы полного дифференциала.
14. Частные производные высших порядков.
15. Дифференциалы высших порядков.

16. Определение экстремума функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
17. Теорема о существовании неявно заданной функции. Дифференцирование неявных функций.
18. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
19. Производная по направлению.
20. Меры плоских множеств, понятие множества меры 0. Теорема об измеримости плоских множеств.
21. Двойной интеграл, его свойства.
22. Геометрический смысл двойного интеграла.
23. Сведение двойного интеграла к повторному.
24. Якобиан отображения, его геометрический смысл.
25. Замена переменной в двойном интеграле.
26. Двойной интеграл в полярной системе координат.
27. Приложения двойного интеграла.
28. Криволинейные интегралы первого рода.
29. Криволинейные интегралы второго рода.
30. Формула Грина.
31. Теорема о независимости криволинейного интеграла от траектории интегрирования.
32. Представление об ориентированной поверхности в трехмерном пространстве.
33. Тройной интеграл: определение, свойства, геометрический смысл.
34. Тройной интеграл. Приложения тройного интеграла.
35. Сведение тройного интеграла к повторному.
36. Замена переменных в тройном интеграле.
37. Поверхностные интегралы первого рода.
38. Поверхностные интегралы второго рода.
39. Приложения поверхностных интегралов.
40. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.
41. Теорема Остроградского-Гаусса.
42. Теорема Стокса.

### **Список вопросов к экзамену (2 курс, 4 семестр)**

1. Скалярные поля. Градиент скалярного поля.
2. Векторные поля. Поток векторного поля.
3. Дивергенция векторного поля.
4. Циркуляция и ротор векторного поля.
5. Теорема Стокса.
6. Теорема о выражении ротора через координатные функции векторного поля.
7. Теорема Остроградского-Гаусса в векторной форме.
8. Специальные виды векторных полей: потенциальное поле, соленоидальное поле, гармоническое поле.
9. Определение собственного интеграла, зависящего от параметра.
10. Непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра.
11. Дифференцирование собственных интегралов, зависящих от параметра.
12. Интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра.
13. Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.
14. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.
15. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра.
16. Комплексные числа, их изображение на плоскости.
17. Модуль и аргумент комплексного числа.
18. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

19. Операции над комплексными числами. Формула Муавра.
20. Комплексная плоскость. Функция комплексного переменного. Основные элементарные функции комплексного переменного.
21. Голоморфные функции.
22. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.
23. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
24. Гидродинамический смысл производной аналитической функции.
25. Конформные отображения.
26. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного.
27. Интегрирование функций комплексного переменного.
28. Интегральная теорема Коши. Независимость интеграла от пути интегрирования.
29. Интегральная формула Коши. Интегральное представление производных аналитических функций.
30. Ряды Тейлора и Лорана.
31. Разложение аналитической функции в ряд Лорана
32. Особые точки.
33. Вычеты.

### Перечень заданий для практического задания

#### Практическое задание № 1

##### Вариант 1

1. Исследовать функцию  $y = f(x)$  и построить ее график:  $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x}$ .
2. Найти предел функции  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$ .

##### Вариант 2

1. Исследовать функцию  $y = f(x)$  и построить ее график:  $y = \frac{\ln x}{x^2 + 4}$ .
2. Найти предел функции  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2}{1-x}}$ .

#### Практическое задание № 2

##### Вариант 1

1. Найти интеграл:  $\int e^x \cos 3x dx$ .
2. Определить радиус и интервал сходимости, а также исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующего степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4^n n!} (x-3)^n.$$

##### Вариант 2

1. Найти интеграл:  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ .



2. Определить радиус и интервал сходимости, а также исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующего степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n n \ln n}.$$

### **Практическое задание № 3**

#### **Вариант 1**

1. Вычислить  $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$ , если область D ограничена окружностью  $x^2 + y^2 = a^2$ ,

лежащей в первой четверти, и прямыми  $y = x$  и  $y = \sqrt{3}x$ .

2. Найти частные производные первого и второго порядков от функции

$$u = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

#### **Вариант 2**

1. По формуле Грина вычислить следующий интеграл

$$\oint_L (ye^{5xy} - 2xy)dx + (xe^{5xy} + 4x + e^y)dy, \text{ где } L: x^2 + y^2 = 4.$$

2. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к поляр-

ным:  $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy.$

### **Практическое задание № 4**

#### **Вариант 1**

1. Дано: функция  $z = \operatorname{arctg}(xy)$ , точка A (2,3) и точка B(6,6). Найти: 1)  $\overline{\operatorname{grad} z}$  в точке A; 2) производную функции в точке A в направлении, идущем от этой точки к точке B; 3) уравнения касательной плоскости и нормали в точке A.

2. Доказать, что работа силы  $F(P(x, y), Q(x, y))$  зависит только от начального и конечного положения точки ее приложения и не зависит от формы пути. Вычислить работу при перемещении точки приложения силы из  $M_1(x_1, y_1)$  в  $M_2(x_2, y_2)$ :

$$P = e^x \cos y, \quad Q = -e^x \sin y, \quad M_1(0;0), \quad M_2(1;2).$$

#### **Вариант 2**

1. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{\operatorname{tg} z}{z \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2}, \quad L: |z|=1.$$

2. Найти все лорановские разложения функции  $f(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}$  по степеням  $(z+2-2i)$ .

### Требования к студентам при проведении промежуточной аттестации:

Свободное владение методами математического анализа для решения практических задач и упражнений. Знание теоретического материала, свободное владение техникой доказательства теорем, умение математически грамотно формулировать утверждения и теоремы, а также их доказывать.

### Критерии и шкалы оценивания при проведении промежуточной аттестации:

Шкала оценивания (суммарный % правильных ответов)	Критерии оценивания
«отлично» (85% – 100 %)	Оценка «отлично» выставляется, если студент правильно ответил на теоретические вопросы. Показал отличные знания в рамках учебного материала. Правильно выполнил практическое задание. Показал отличные умения и владения навыками применения полученных знаний и умений при решении задач в рамках учебного материала. Ответил на все дополнительные вопросы.
«хорошо» (71% – 84 %)	Оценка «хорошо» выставляется, если студент с небольшими неточностями ответил на теоретические вопросы. Показал хорошие знания в рамках учебного материала. С небольшими неточностями выполнил практические задания. Показал хорошие умения и владения навыками применения полученных знаний и умений при решении задач в рамках учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов.
«удовлетворительно» (51% – 70 %)	Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент с существенными неточностями ответил на теоретические вопросы. Показал удовлетворительные знания в рамках учебного материала. С существенными неточностями выполнил практические задания. Показал удовлетворительные умения и владения навыками применения полученных знаний и умений при решении задач в рамках учебного материала. Допустил много неточностей при ответе на дополнительные вопросы.
«неудовлетворительно» (0% – 50 %)	Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если студент при ответе на теоретические вопросы и при выполнении практических заданий продемонстрировал недостаточный уровень знаний и умений при решении задач в рамках учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы было допущено множество неправильных ответов.

### Задания для контроля остаточных знаний

С выбором ответа (тест)

№	Задание	Варианты ответа
1.	Укажите область определения функции $y = \sqrt{5^{3x+1} - 1}$	1. $[-3; +\infty)$ 2. $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ - правильно 3. $(0; 3)$ 4. $[-3; 10)$ 5. $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right]$
2.	Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$	1. $R=1$ 2. $R=6$ 3. $R=4$ 4. $R=2$ - правильно 5. $R=5$
3.	Найдите предел функции	1. 2 2. 6

	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 15x}{\sin 3x}$	3. 5 - правильно 4. 3 5. 1
4.	Найдите интеграл $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$	1. $\frac{\ln^4 x}{4} + C$ - правильно 2. $2\ln^2 x + C$ 3. $\ln x + C$ 4. $\frac{\ln^6 x}{6} + C$ 5. $x \cdot \ln x + C$
5.	Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 3, \quad y = x^2 + 1$	1. 2,5 2. 10 3. 4,5 - правильно 4. 3 5. 20
6.	Найдите произведение комплексных чисел $z_1 \cdot z_2$ , если $z_1 = 5 + 2i, z_2 = 1 - 2i$	1. $3 - 2i$ 2. $-1 + 6i$ 3. $5 + 8i$ 4. $9 - 8i$ - правильно 5. $-2i$
7.	Найдите смешанную производную $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ для функции $f(x, y) = \sin x - 6x^2 y$	1. 0 2. $\cos x - 1$ 3. $\cos x - 12xy$ - правильно 4. $-12xy$ 5. $\sin x - xy$
8.	Комплексно-сопряженным для числа $z = 3 - 5i$ является?	1. $\bar{z} = 3 + 5i$ - правильно 2. $\bar{z} = -3 + 5i$ 3. $\bar{z} = 5 + 3i$ 4. $\bar{z} = -3 - 5i$ 5. $\bar{z} = -5 + 3i$
9.	Чему равен модуль комплексного числа $z = 4 - 3i$ ?	1. $ z  = \sqrt{17}$ 2. $ z  = \sqrt{10}$ 3. $ z  = 5$ - правильно 4. $ z  = 8$ 5. $ z  = \sqrt{7}$
10.	Последовательность $\left(\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$ является...	1. условно ограниченной 2. бесконечно малой - правильно 3. бесконечно большой 4. малой 5. возрастающей

С кратким ответом (в ответе число или слово)

№	Задание	Ответ
1.	Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 (x^3 \cdot y)}{\partial y^2}$ равна...	0
2.	Несобственный интеграл	1

	$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^2}$ равен ...	
3.	Чему равен предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$ ?	-1
4.	Для всех $x$ из области определения функции $f(x)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ . Функция $f(x)$ называется...	четная
5.	Градиент функции $f(x, y, z) = 4x^2 + yz - 7$ в точке $M(1, 1, 1)$ равен...	(8, 1, 1)

С развёрнутым ответом

### Задание 1

Найти область определения функции:  $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} - \ln(x - y)$ .

### Решение

Областью определения функции будет являться следующее множество точек плоскости:

$$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16 - x^2 - y^2 \geq 0, x - y > 0\}.$$

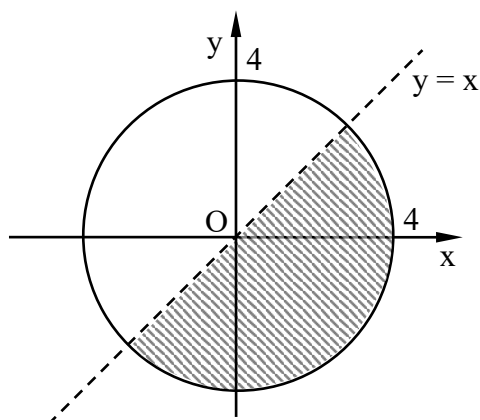


Рисунок 1

Рассмотрим первое неравенство. Запишем его в виде  $x^2 + y^2 \leq 16$ . Это неравенство определяет область, лежащую внутри окружности радиуса 4 и центром в начале координат. Так как неравенство не строгое, то сама окружность принадлежит этой области. Рассмотрим второе неравенство. Запишем его в виде  $y < x$ . Это неравенство определяет область, лежащую ниже прямой  $y = x$ . Так как неравенство строгое, то сама прямая не принадлежит этой области. Пересечение двух полученных областей и будет задавать область определения рассматриваемой функции  $z$  (рисунок 1).

### Задание 2

Найти производные  $z'_x$  и  $z'_y$  неявной функции  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 1$ .

### Решение

Преобразуем уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 1$  к виду  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 1 = 0$ .

Обозначим левую часть полученного уравнения через  $F(x, y, z)$ , т.е.

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 1$ . Найдем частные производные:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{(x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 1)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 1)'_z} = -\frac{2x + 2z}{2z + 2x} = -1,$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{(x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 1)'_y}{(x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 1)'_z} = -\frac{2y}{2z + 2x} = -\frac{y}{x + z}.$$

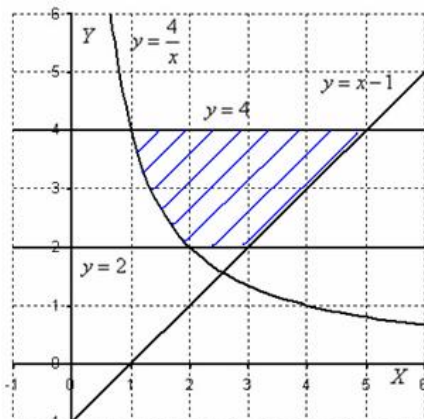
В результате получим:  $z'_x = -1$ ;  $z'_y = -\frac{y}{x + z}$ .

### Задание 3

С помощью двойного интеграла, вычислить площадь плоской фигуры  $D$ , ограниченной линиями  $y = \frac{4}{x}$ ,  $y = 4$ ,  $y = x - 1$ ,  $y = 2$ .

### Решение

Изобразим данную фигуру на чертеже:



Площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла по формуле:  $S = \iint_D dx dy$ . Перейдём

к обратным функциям:  $y = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4}{y}$ ,  $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$ .

Порядок обхода области:  $\frac{4}{y} \leq x \leq y + 1$ ,  $2 \leq y \leq 4$ .

Таким образом:  $S = \iint_D dx dy = \int_2^4 dy \int_{\frac{4}{y}}^{y+1} dx$

$$1) \int_{\frac{4}{y}}^{y+1} dx = x \Big|_{\frac{4}{y}}^{y+1} = y + 1 - \frac{4}{y}$$

$$2) \int_2^4 \left( y + 1 - \frac{4}{y} \right) dy = \left( \frac{y^2}{2} + y - 4 \ln y \right) \Big|_2^4 = 8 + 4 - 4 \ln 4 - (2 + 2 - 4 \ln 2) = 8 + 4 \ln \frac{1}{2} = 8 - 4 \ln 2 \text{ (ед.}^2\text{)}$$

**Ответ:**  $S = 8 - 4 \ln 2$  (ед.<sup>2</sup>)

### Задание 4

Найти предел функции, используя правило Лопиталя  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ .

### Решение

Правило Лопиталя  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{3x} = \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

### Задание 5

Найти криволинейный интеграл  $\int_L xy^2 dl$ , где  $L$  — отрезок прямой между точками  $O(0, 0)$  и  $A(4, 3)$ .

**Решение**

Уравнение прямой  $OA$  есть  $y = \frac{3}{4}x$ ,  $0 \leq x \leq 4$ ,  $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ ,  $y'(x) = \frac{3}{4}$ .

$$\int_L xy^2 dl = \int_0^4 x \left(\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} dx = \frac{45}{64} \int_0^4 x^3 dx = 45.$$